№15-дәріс

Бірнеше айнымалы функциялардың жоғары ретті туындылары мен дифференциалдары, бірнеше айнымалы функцияның экстремумы.

Анықтама 1. Анықталу облысы жазықтықтың(кеңістіктің) ішкі жиыны болатын D облысы, ал мәндер облысы нақты осьтің бойындағы E жиыны болатын функция екі(үш) айнымалыға байланысты функция деп аталады.

D - Oxy жазықтығындағы жиын, ал E - Oz осінің жиыны болатын екі айнымалыға байланысты функция $z = f(x, y)$ түрінде жазылады.

Айқын түрде берілген функциялардың дербес туындыларының анықтамасын беру үшін $y = const$ деп есептеп, x-ке Δx өсімшесін береміз $(x + \Delta x \in D)$. Онда z функциясының x бойынша дербес өсімшесі:

$$\Delta_x z = f(x + \Delta x; y) - f(x; y).$$

Дәл осылай, z функциясының y бойынша дербес өсімшесін табамыз:

$$\Delta_y z = f(x; y + \Delta y) - f(x; y).$$

Егер x пен y-тің екеуіне де сәйкесінше $\Delta x, \Delta y$ өсімшелерін беретін болсақ, онда z функциясының толық өсімшесін аламыз:

$$\Delta z = f(x + \Delta x; y + \Delta y) - f(x; y) \tag{1}$$

Жалпы жағдайда, $\Delta z \neq \Delta_x z + \Delta_y z$ болатынын айта кеткен жөн.

Анықтама 4. $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta_x z}{\Delta x}$ $\left[\lim\limits_{\Delta y \to 0} \dfrac{\Delta_y z}{\Delta y} \right]$ шектері бар болса, онда ол шектер z функциясынан x айнымалысы [z функциясынан y айнымалысы] бойынша алынған *дербес туындылар* деп аталады

.

Анықтама 5. $z = f(x; y)$ функциясының толық өсімшесі

$$\Delta z = \frac{\partial f(x; y)}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f(x; y)}{\partial y} \Delta y + \alpha_1 \Delta x + \alpha_2 \Delta y \tag{2}$$

мұндағы α_1 және α_2 $\Delta x \to 0$ және $\Delta y \to 0$ шексіз аз шамалар болатын теңдігімен өрнектелсе, онда ол *дифференциалданатын функция* деп аталады, ал бас (сызықтық) бөлігі $\dfrac{\partial f(x; y)}{\partial x} \Delta x + \dfrac{\partial f(x; y)}{\partial y} \Delta y$ *толық дифференциал* деп аталады және былай белгіленеді

$$(\Delta x = dx\ ,\ \Delta y = dy) : \partial z = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$$

(1) және (2) теңдіктерін салыстырып, $\Delta z \approx dz$ жуықтауын аламыз. Осы жуықтауды (x_0, y_0) нүктесі үшін жазып,

$$f\left(x+\Delta x;\ y+\Delta y\right)\approx f\left(x_0;y_0\right)+\frac{\partial f\left(x_0\,;y_0\right)}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial f\left(x_0\,;y_0\right)}{\partial y}\Delta y$$

дифференциалды жуықтап есептеуге қолдану формуласын аламыз.

$z=F(u\,;v)$ функциясы берілсін, мұндағы $u=\varphi(x;\ y)$, $v=\psi(x\,;y)$ және F,φ,ψ функцияларының үзіліссіз дербес туындылары табылсын, онда z функциясынан x және y айнымалылары бойынша алынған дербес туындылар төмендегі формулалармен есептеледі:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}.$$

Егер $z=F(x,y,u)$ функциясы берілсе, мұндағы $y=f(x)$, $u=\psi(x)$, онда толық туынды $\frac{dz}{dx}=\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dx}+\frac{\partial z}{\partial u}\frac{du}{dx}$ - формуласымен анықталады.

Туынды және жоғарғы ретті дифференциалдар

$y=f(x)\in C^1[a\,;b]$ болсын. Егер $z=f'(x)\in C^1[a\,;b]$ болса, онда z' $y=f(x)$ функциясының екінші туындысы деп аталады және былай белгіленеді: $f''(x)$. Яғни,

$$f''(x)=\left[f'(x)\right]' \quad \text{немесе} \quad y''(x)=\left[y'(x)\right]'$$

Анықтама. $y=f(x)$ функциясының n-ші ретті туындысы деп $(n-1)$-ші ретті туындыдан алынған туындыны айтамыз, яғни,

$$f^{(n)}(x)=\left[f^{(n-1)}(x)\right]'$$

Мысал 1. $y=x^2\Rightarrow y'=2x\Rightarrow y''=2\Rightarrow y'''=0\Rightarrow y^{IV}=0\ldots$

$dy=f'(x)\in C^1[a\,;b]$ болсын. Онда $d^2y=d(dy)$ $f(x)$ функциясының екінші ретті дифференциалы деп аталады. Бұдан

$$d^2y=d(dy)=\left[f'(x)dx\right]'dx=f''(x)(dx)^2=f''(x)dx^2.$$

Анықтама . $y=f(x)$ функциясының n-ші ретті дифференциалы деп $(n-1)$-ші ретті дифференциалды тағы бір рет дифференциалдауды айтамыз және

$$d^ny=f^{(n)}(x)dx^n \qquad (1)$$

(6)-дан

$$f^{(n)}(x)=\frac{d^ny}{dx^n} \qquad (2)$$

шығады. (1) және (2) теңдіктер x айнымалысы тәуелсіз айнымалы болған жағдайда ғана ақиқат.

$y=F(u)$, $u=\varphi(x)$ болсын. Онда $dy=F'(u)du$.

$$d^2y=d\left[F'(u)du\right]=d\left[F'(u)\right]du+F'(u)d(du)=F''(u)(du)^2+F'(u)d^2u,$$

яғни, дифференциалдың формасының инварианттылығы сақталмайды.

$\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$ түріндегі анықталмағандықтарды ашу. Лопиталь ережесі.

Мысал 2.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln^2 x}{x^3}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\left[\ln^2 x\right]'}{\left(x^3\right)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2\ln x}{x}}{3x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{2\ln x}{3x^3}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{(2\ln x)'}{\left(3x^3\right)'}=\frac{2}{3}\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{3x^2}=\frac{2}{9}\lim_{x\to\infty}\frac{1}{3x^3}=0.$$

(8)-ші формуланың сол жағынның шегі табылуы мүмкін, ал оң жағының шегі – табылмайды.

Мысал 3.

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\cdot\sin\frac{1}{x}}{x}=\lim_{x\to 0}x\cdot\sin\frac{1}{x}=0.$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\left(x^2\sin\frac{1}{x}\right)'}{(\sin x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{2x\cdot\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}}{\cos x}=\lim_{x\to 0}2x\cdot\sin\frac{1}{x}-\lim_{x\to 0}\cos\frac{1}{x}=0-\lim_{x\to 0}\cos\frac{1}{x}$$ - шегі табылмайды.

Мысал 4. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{3x}-1}{\sin 5x}$ шегін есепте.

Берілген бөлшектің алымы мен бөлімі үзіліссіз, дифференциалданатын және нөлге ұмтылатын функция. Яғни, Лопиталь ережесін екі рет қолдана аламыз :

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 4x}{x^2}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 0}\frac{4\sin x}{2x}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 0}\frac{4*4\cos 4x}{2}=8.$$

Туынды көмегімен функцияны зерттеп, графигін салу схемасы.

$y=f(x)\in C^1[a;b]$ болсын. Егер $z=f'(x)\in C^1[a;b]$ болса, онда z' $y=f(x)$ функциясының екінші туындысы деп аталады және былай белгіленеді: $f''(x)$. Яғни,

$$f''(x)=\left[f'(x)\right]' \quad \text{немесе} \quad y''(x)=\left[y'(x)\right]'$$

Анықтама 5. $y=f(x)$ функциясының n-ші ретті туындысы деп ($n-1$)-ші ретті туындыдан алынған туындыны айтамыз, яғни,

$$f^{(n)}(x)=\left[f^{(n-1)}(x)\right]'$$

Мысал 6. $y=x^2\Rightarrow y'=2x\Rightarrow y''=2\Rightarrow y'''=0\Rightarrow y^{IV}=0\ldots$

$dy=f'(x)\in C^1[a;b]$ болсын. Онда $d^2y=d(dy)$ $f(x)$ функциясының екінші ретті дифференциалы деп аталады. Бұдан

$$d^2y=d(dy)=\left[f'(x)dx\right]'dx=f''(x)(dx)^2=f''(x)dx^2.$$

Анықтама 6. $y=f(x)$ функциясының n-ші ретті дифференциалы деп ($n-1$)-ші ретті дифференциалды тағы бір рет дифференциалдауды айтамыз және

$$d^n y=f^{(n)}(x)dx^n \tag{6}$$

(6)-дан

$$f^{(n)}(x)=\frac{d^n y}{dx^n} \tag{7}$$

шығады. (6) және (7) теңдіктер x айнымалысы тәуелсіз айнымалы болған жағдайда ғана ақиқат.

$y = F(u),\ \ u = \varphi(x)$ болсын. Онда $dy = F'(u)du$.

$$d^2y = d\left[F'(u)du\right] = d\left[F'(u)\right]du + F'(u)d(du) = F''(u)(du)^2 + F'(u)d^2u,$$

яғни, дифференциалдың формасының инварианттылығы сақталмайды.

Екі функцияның көбейтіндісінің жоғарғы ретті туындысын қарастыралық.

$f(x)$ және $g(x)$ функциялары k – рет дифференциалданатын функциялар болсын, онда Лейбниц формуласы орынды:

$$(f \cdot g)^{(k)} = f^{(k)}g(x) + kf^{(k-1)}(x)g'(x) + \frac{k(k-1)}{2}f^{(k-2)}(x) \cdot g''(x) +$$

$$+ \cdots + \frac{k!}{m!\cdot(k-m)!}f^{(k-m)}(x) \cdot g^{(m)}(x) + \cdots + k \cdot f'(x) \cdot g^{(k-2)}(x) + f(x) \cdot g^{(k)}(x) =$$

$$= \sum_{m=0}^{k}\frac{k!}{m!\cdot(k-m)!}f^{(k-m)}(x) \cdot g^{(m)}(x); \qquad (Cf)^{(k)} = Cf^{(k)}.$$

Дәлелдеусіз.

Мысал 7. Лейбниц формуласын қолданып $(e^x \cdot x^2)^{(10)}$ есепте.

$$(e^x \cdot x^2)^{(10)} = (e^x)^{(10)} \cdot (x^2) + 10(e^x)^{(9)} \cdot (x^2)' + \frac{10 \cdot 9}{1 \cdot 2}(e^x)^{(8)} \cdot (x^2)'' +$$

$$+ \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3}(e^x)^{(7)} \cdot (x^2)''' + \cdots .$$

$(e^x)^{(k)} = e^x$ және $(x^2)''' = (2x)'' = 2' = 0$ екенін көреміз, сондықтан $(x^2)^{(k)} = 0$ орынды, $k = 3, 4, \cdots$ үшін және келесі қосылғыштар да нөлге тең болады, ендеше

$$(e^x \cdot x^2)^{(10)} = e^x \cdot x^2 + 10e^x \cdot 2x + 45e^x \cdot 2 = e^x(x^2 + 20x + 90).$$